Chapter 16: Introducing PL Trees

Tautologically invalid!

- R *nowhere occurs in premises.*
- *Premises are not taut. inconsistent.*

<u>*Ex1*</u>. $(\mathsf{P} \land \neg\mathsf{Q}), (\mathsf{P}' \land \neg\mathsf{Q}'), (\mathsf{P}'' \land \neg\mathsf{Q}'') \therefore \mathsf{R}$

- Truth table would contain $2^7 = 128$ rows!
- But all we really need to construct is a counterexample for which:

  (1) $(\mathsf{P} \land \neg\mathsf{Q}) \Rightarrow \mathrm{T}$

  (2) $(\mathsf{P}' \land \neg\mathsf{Q}') \Rightarrow \mathrm{T}$

  (3) $(\mathsf{P}'' \land \neg\mathsf{Q}'') \Rightarrow \mathrm{T}$

  (4) $\mathsf{R} \Rightarrow \mathrm{F}$

- For (1), must have:

  (5) $\mathsf{P} \Rightarrow \mathrm{T}$

  (6) $\neg\mathsf{Q} \Rightarrow \mathrm{T}$ so $\mathsf{Q} \Rightarrow \mathrm{F}$

- For (2), (3), must have:

  (7) $\mathsf{P}' \Rightarrow \mathrm{T}$

  (8) $\neg\mathsf{Q}' \Rightarrow \mathrm{T}$ so $\mathsf{Q}' \Rightarrow \mathrm{F}$

  (9) $\mathsf{P}'' \Rightarrow \mathrm{T}$

  (10) $\neg\mathsf{Q}'' \Rightarrow \mathrm{T}$ so $\mathsf{Q}'' \Rightarrow \mathrm{F}$

<u>*Thus*</u>: The valuation $\mathsf{P} \Rightarrow \mathrm{T}$, $\mathsf{Q} \Rightarrow \mathrm{F}$, $\mathsf{P}' \Rightarrow \mathrm{T}$, $\mathsf{Q}' \Rightarrow \mathrm{F}$, $\mathsf{P}'' \Rightarrow \mathrm{T}$, $\mathsf{Q}'' \Rightarrow \mathrm{F}$ makes the premises true and the conclusion false.

Ex2. $(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}), \neg(\neg \mathsf{R} \vee \mathsf{S}) \therefore \neg(\mathsf{R} \wedge \mathsf{Q})$

- This is invalid if there is a valuation underwhich:

  (1) $(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}) \Rightarrow$ T

  (2) $\neg(\neg \mathsf{R} \vee \mathsf{S}) \Rightarrow$ T

  (3) $\neg(\mathsf{R} \wedge \mathsf{Q}) \Rightarrow$ F

- For (1), must have:

  (4) $\mathsf{P} \Rightarrow$ T

  (5) $\mathsf{Q} \Rightarrow$ T

- For (2), must have:

  (6) $(\neg \mathsf{R} \vee \mathsf{S}) \Rightarrow$ F

  (7) $\neg \mathsf{R} \Rightarrow$ F

  (8) $\mathsf{S} \Rightarrow$ F

  (9) $\mathsf{R} \Rightarrow$ T

- For (3), must have:

  (10) $(\mathsf{R} \wedge \mathsf{Q}) \Rightarrow$ T

  (11) $\mathsf{R} \Rightarrow$ T

  (12) $\mathsf{Q} \Rightarrow$ T

Thus: The valuation $\mathsf{P} \Rightarrow$ T, $\mathsf{Q} \Rightarrow$ T, $\mathsf{R} \Rightarrow$ T, $\mathsf{S} \Rightarrow$ F makes the premises true and the conclusion false.

So: **PL** arugment is ***tautologically invalid***.

Ex3. $(\mathsf{P} \wedge \neg\mathsf{Q}) \therefore \neg(\mathsf{Q} \wedge \mathsf{R})$

Require:

(1) $(\mathsf{P} \wedge \neg\mathsf{Q}) \Rightarrow \mathrm{T}$

(2) $\neg(\mathsf{Q} \wedge \mathsf{R}) \Rightarrow \mathrm{F}$

So:

(3) $\mathsf{P} \Rightarrow \mathrm{T}$

(4) $\neg\mathsf{Q} \Rightarrow \mathrm{T}$

(5) $\mathsf{Q} \Rightarrow \mathrm{F}$

And:

(6) $(\mathsf{Q} \wedge \mathsf{R}) \Rightarrow \mathrm{T}$

(7) $\mathsf{Q} \Rightarrow \mathrm{T}$

(8) $\mathsf{R} \Rightarrow \mathrm{T}$

But this can't be!

So: It's not possible to construct a valuation that makes premises true and conclusion false.

So: **PL** argument is ***tautologically valid!***

Ex4. (Branching case) $(\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}) \therefore \mathsf{P}$

(1) $(\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}) \Rightarrow \mathrm{T}$

(2) $\mathsf{P} \Rightarrow \mathrm{F}$

(3) $\mathsf{P} \Rightarrow \mathrm{T}$ $\quad$ $\mathsf{Q} \Rightarrow \mathrm{T}$

$*$

Left branch is not possible.

Convention: Mark it with "*".

Right branch is possible.

So: Under the valuation $\mathsf{P} \Rightarrow \mathrm{F}$, $\mathsf{Q} \Rightarrow \mathrm{T}$, the premises are true and the conclusion is false.

So: **PL** argument is ***tautologically invalid***.

Ex5. $(\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}), \neg\mathsf{P} \therefore \mathsf{Q}$

(1) $(\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}) \Rightarrow \mathrm{T}$

(2) $\neg\mathsf{P} \Rightarrow \mathrm{T}$

(3) $\mathsf{Q} \Rightarrow \mathrm{F}$

(4) $\mathsf{P} \Rightarrow \mathrm{T}$ $\quad$ $\mathsf{Q} \Rightarrow \mathrm{T}$

$*$ $\quad$ $*$

All branches end in $*$.

Thus: No valuation exists that makes premises true and conclusion false.

So: **PL** argument is ***tautologically valid***.

<u>Ex6</u>. $\neg(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}), (\mathsf{P} \wedge \mathsf{R}) \therefore \neg(\mathsf{R} \vee \mathsf{Q})$

(1) $\neg(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}) \Rightarrow \mathrm{T}$

(2) $(\mathsf{P} \wedge \mathsf{R}) \Rightarrow \mathrm{T}$

(3) $\neg(\mathsf{R} \vee \mathsf{Q}) \Rightarrow \mathrm{F}$

(4) $(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}) \Rightarrow \mathrm{F}$ (from 1)

(5) $\mathsf{P} \Rightarrow \mathrm{T}$ (from 2)

(6) $\mathsf{R} \Rightarrow \mathrm{T}$ (from 2)

(7) $(\mathsf{R} \vee \mathsf{Q}) \Rightarrow \mathrm{T}$ (from 3)

(8) $\mathsf{P} \Rightarrow \mathrm{F}$ $\mathsf{Q} \Rightarrow \mathrm{F}$ (from 4)

    *

(9) $\mathsf{R} \Rightarrow \mathrm{T}$ $\mathsf{Q} \Rightarrow \mathrm{T}$ (from 7)

             *

The valuation $\mathsf{P} \Rightarrow \mathrm{T}$, $\mathsf{Q} \Rightarrow \mathrm{F}$, $\mathsf{R} \Rightarrow \mathrm{T}$ makes premises true and conclusion false.
<u>So</u>: **PL** argument is ***tautologically invalid***.

"T"-only Trees

Trick 1: Start by assigning T to premises and T to the *negation* of conclusion.

Trick 2: For any *wff* C, replace occurances of $C \Rightarrow$ F with $\neg C \Rightarrow$ T.

Trick 2 may require skipping steps in a tree:

Ex.

(n)	$\neg(A \vee B) \Rightarrow$ T	
$(n+1)$	$\neg A \Rightarrow$ T	
$(n+2)$	$\neg B \Rightarrow$ T	

Skipped steps:

$(A \vee B) \Rightarrow$ F

$A \Rightarrow$ F

$B \Rightarrow$ F

(m) $\neg(A \wedge B) \Rightarrow$ T

$(m+1)$ $\neg A \Rightarrow$ T $\quad$ $\neg B \Rightarrow$ T

Skipped steps:

$(A \wedge B) \Rightarrow$ F

$A \Rightarrow$ F $\quad$ $B \Rightarrow$ F

Ex6 again: $\neg(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}), (\mathsf{P} \wedge \mathsf{R}) \therefore \neg(\mathsf{R} \vee \mathsf{Q})$

(1) $\neg(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}) \Rightarrow \mathrm{T}$

(2) $(\mathsf{P} \wedge \mathsf{R}) \Rightarrow \mathrm{T}$

(3) $\neg\neg(\mathsf{R} \vee \mathsf{Q}) \Rightarrow \mathrm{T}$

(4) $\mathsf{P} \Rightarrow \mathrm{T}$ (from 2)

(5) $\mathsf{R} \Rightarrow \mathrm{T}$ (from 2)

(6) $(\mathsf{R} \vee \mathsf{Q}) \Rightarrow \mathrm{T}$ (from 3)

(7) $\neg\mathsf{P} \Rightarrow \mathrm{T}$ $\quad$ $\neg\mathsf{Q} \Rightarrow \mathrm{T}$ (from 1, skipping steps!)

*

(9) $\mathsf{R} \Rightarrow \mathrm{T}$ $\quad$ $\mathsf{Q} \Rightarrow \mathrm{T}$ (from 6)

*

The valuation $\mathsf{P} \Rightarrow \mathrm{T}$, $\mathsf{Q} \Rightarrow \mathrm{F}$, $\mathsf{R} \Rightarrow \mathrm{T}$ makes premises true and conclusion false.
So: **PL** argument is ***tautologically invalid***.

"Unsigned" Trees

In "T-only" trees, delete all occurences of the symbols "⇒" and "T".

Ex7: $(P \vee Q), \neg(P \wedge \neg R) \therefore (Q \vee R)$

(1) $(P \vee Q)$

(2) $\neg(P \wedge \neg R)$

(3) $\neg(Q \vee R)$

(4) $\neg Q$ (from 3)

(5) $\neg R$ (from 3)

(6) P | Q (from 1)

Q branch: *

(7) $\neg P$ | $\neg\neg R$ (from 2)

$\neg P$: * $\neg\neg R$: *

All branches close up!

So: The **PL** arugment is tautologically invalid.

Ex8: $(P \vee (Q \wedge R)),\ (\neg P \vee R),\ \neg(Q \vee \neg\neg S)\ \therefore\ (S \wedge R)$

(1)	$(P \vee (Q \wedge R))$				
(2)	$(\neg P \vee R)$				
(3)	$\neg(Q \vee \neg\neg S)$				
(4)	$\neg(S \wedge R)$				
(5)	$\neg Q$				from (3)
(6)	$\neg\neg\neg S$				from (3)
(7)	$\neg S$				from (6)
(8)		P		$(Q \wedge R)$	from (1)
(9)	$\neg P$		R	R	from (8) and (2)
	*				
(10)		$\neg S$	$\neg R$	Q	from (8) and (4)
			*	*	

The valuation $S \Rightarrow F$, $R \Rightarrow T$, $P \Rightarrow T$, $Q \Rightarrow F$ makes premises true and conclusion false.

So: The **PL** arugment is tautologically invalid.